

受迫阻尼振动系统动力学性质的研究*

王 忆¹, 杨玉屏², 赵健生²

(1. 中国科学技术大学 天文与应用物理系, 安徽 合肥 230026; 2. 广州师范学院 物理系, 广东 广州 510405)

摘要: 对受迫阻尼振动系统 3 种情况的动力学行为以及它们的能量状况作了较深入的定量研究, 该研究对分析我们遇到的实际受迫振动系统有一定的指导意义.

关键词: 受迫阻尼振动; 阻尼因数; 固有频率

中图分类号: O 321 文献标识码: A 文章编号: 1000-0712(2001) 07-0022-04

我们知道, 几乎所有的振动系统都受到各种阻力的影响, 如空气阻力、摩擦力等. 同时, 系统只有在策动力的作用下才能维持振动. 振动是在阻力和受迫力的共同作用下发生的, 它还受到系统固有频率的制约. 因此, 对不同的阻尼因数 γ , 受迫力频率 ω , 以及系统固有圆频率 ω_0 , 系统振动情况都会不同. 那么, 它们是怎样影响系统的振动呢? 下面, 我们就这个问题作定量研究.

受迫振动的动力学方程为

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (1)$$

令 $2\gamma = \frac{\lambda}{m}$; $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, 整理可得

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (2)$$

其中 γ 为阻尼因数, ω_0 为系统的固有频率.

微分方程 (2) 的特征方程为 $\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$, 由此可解出

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (3)$$

根据 γ^2 与 ω_0^2 的关系, 可得出齐次解的 3 种不同形式分别为:

1) 当 $\gamma^2 < \omega_0^2$ 时, $\alpha = -\gamma \pm j \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma \pm j \omega'$

$$x = e^{-\gamma t} (C_1 \cos \omega' t + C_2 \sin \omega' t) \quad (4)$$

2) 当 $\gamma^2 > \omega_0^2$ 时, $\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$
 $x = C_1 e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} \quad (5)$

3) 当 $\gamma^2 = \omega_0^2$ 时, $\alpha_1 = \alpha_2 = -\gamma$
 $x = (C_1 + C_2 t) e^{-\gamma t} \quad (6)$

设方程 (2) 的特解形式为 $x^* = a \cos \omega t + b \sin \omega t$, 代入方程后解得

$$x^* = \frac{F_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{m(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4m\gamma^2\omega^2} \cos \omega t + \frac{2F_0\gamma\omega}{m(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4m\gamma^2\omega^2} \sin \omega t = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t - \theta) \quad (7)$$

其中 $\tan \theta = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$, θ 是受迫力与受迫阻尼振动系统的相位差.

给定初始条件为 $t = 0, x_0 = A, v_0 = 0$, 便可求出待定系数, 从而得出微分方程的完全解.

由式 (4) 和特解式 (7) 可得

$$x = e^{-\gamma t} \left[\left[A + \frac{F_0 \sin \theta}{m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \right] \cos \omega' t + \frac{F_0(\gamma \sin \theta - \omega \cos \theta)}{m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \sin \omega' t \right] + \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t - \theta) \quad (8)$$

根据式 (8), 我们使用计算机进行数值计

* 收稿日期: 1999- 11- 16; 修回日期: 2000- 11- 23

** 作者简介: 王忆 (1963-), 男, 安徽亳州人, 中国科学技术大学天文与应用物理系副教授, 博士, 主要从事凝聚态物理理论研究.

算, 得到在 $\gamma^2 < \omega_0^2$ 下, 系统的振动在不同受迫力频率 ω 下随时间变化状况的曲线, 如图 1 所示.

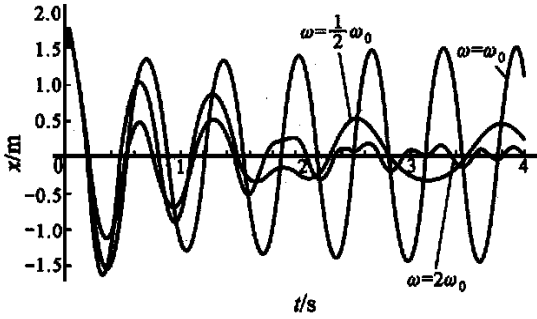


图 1

图 1 中 3 条曲线取同一 γ 值, 从图中可以看出: 1) 系统在 γ 较小, 即所受阻尼较弱的情况下, 系统受强迫力作用的效果比较明显, 系统很快就能达到谐振状态; 2) 在 ω 和 ω_0 相等时振幅衰减得最小, 对于受迫力频率偏离固有频率的受迫振动振幅衰减较快; 3) 对于受迫频率大于固有频率的振动衰减要比受迫频率小于固有频率的振动衰减更快.

根据初始条件和式(5)、特解式(7), 我们得到当 $\gamma^2 > \omega_0^2$ 时的解为

$$x = \left[\frac{\gamma A + \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} (\gamma \sin \theta - \omega \cos \theta)}{2 \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} + \frac{A + \frac{F_0 \sin \theta}{m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}}{2} \right] e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + \left[\frac{A + \frac{F_0 \sin \theta}{m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}}{2} - \frac{\gamma A + \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} (\gamma \sin \theta - \omega \cos \theta)}{2 \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \right] e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \theta) \quad (9)$$

根据式(9), 我们进行了数值计算, 得到在 $\gamma^2 > \omega_0^2$ 下系统的振动在不同受迫力频率 ω 下随时间变化状况的曲线, 如图 2 所示.

图 2 中 3 条曲线取同一 γ 值, 从图中可以

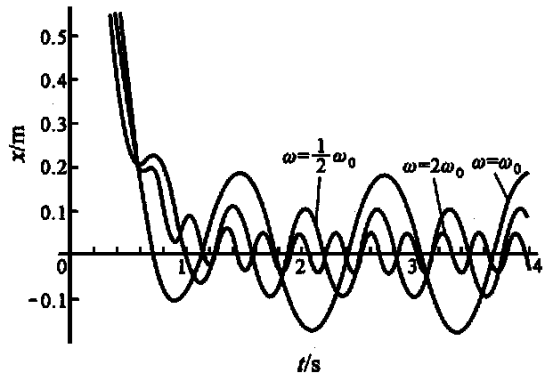


图 2

明显看出: 1) 在阻尼较大的情况下, 振动衰减到谐振状态时所需的时间较短; 2) 当 ω 和 ω_0 相等时, 振幅衰减得最小, 而当 ω 大于 ω_0 时, 振幅衰减得较大, 当 ω 小于 ω_0 时, 振幅衰减得较小; 3) 在 ω 和 ω_0 相同时, 振动不需要经过调整阶段就能很快达到谐振状态, 而当 ω 大于或小于 ω_0 时, 振动会出现一系列的调整阶段才能达到振幅恒定的谐振状态.

根据初始条件和式(6)、特解式(7), 我们得到当 $\gamma^2 = \omega_0^2$ 的第三种情况下微分方程的解为

$$x = \left\{ \left[A + \frac{F_0 \sin \theta}{m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \right] + \left[\gamma A + \frac{F_0 (\gamma \sin \theta - \omega \cos \theta)}{m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \right] t \right\} e^{-\gamma t} + \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \theta) \quad (10)$$

对式(10)进行数值计算, 得到系统的振动在不同受迫力频率 ω 下随时间变化状况的曲线, 如图 3 所示.

图 3 中 3 条曲线取同一 γ 值, 从图中可以明显看出: 1) 系统在极短时间内就能达到谐振状态; 2) 当 ω 和 ω_0 相等时, 振幅衰减得较小, 当 ω 小于 ω_0 时次之, 当 ω 大于 ω_0 时, 振幅衰减较大; 3) 只有在 ω 大于 ω_0 时, 振幅才有一个比较平缓的调整状态, 而其余两种情况不存在调整阶段就能达到稳定状态.

系统的固有频率 ω_0 对系统的振动也有影响, 我们对第一种情况下系统振动在不同固有

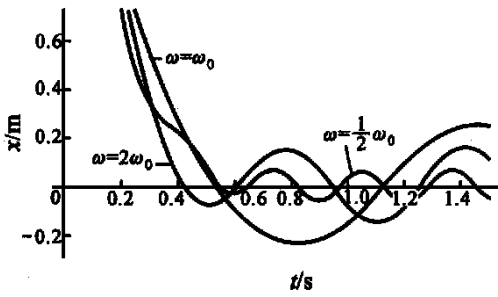


图3

频率 ω_0 下随时间的变化状况进行了计算, 曲线如图4所示。

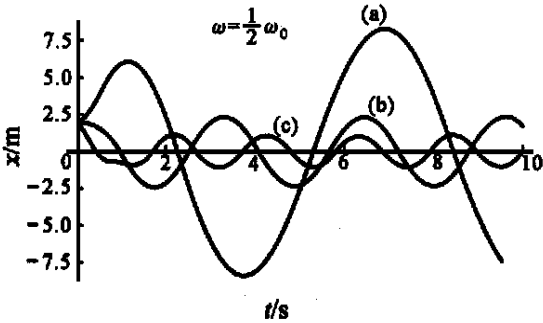


图4

图4中3条曲线取同一 γ 值。从图中可以明显看出: 1) 系统由于受到受迫力的作用, 最终也能达到振幅恒定的谐振状态; 2) 当 ω_0 取某一确定值时, 受迫力对系统的影响不大, 系统基本上维持原来的振幅, 如曲线(b)所示。当 ω_0 小于该值时, 受迫力对系统的影响较大, 使系统的振幅增大, 如曲线(a)所示。当 ω_0 大于该值时, 受迫力会使系统的振幅减小, 如曲线(c)所示。

下面研究受迫振动系统的能量问题。

根据 $v = \frac{dx}{dt}$ 和 $E = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2$, 我们分别研究了当 $\gamma^2 < \omega_0^2$, $\gamma^2 > \omega_0^2$ 和 $\gamma^2 = \omega_0^2$ 的3种情况下受迫阻尼系统的总能量随时间的变化关系, 图5是在系统固有频率 ω_0 不变的情况下, 系统的能量在不同阻尼因数 γ 下随时间变化的状况。

从图中可以看出: 1) 由于系统受到阻力的

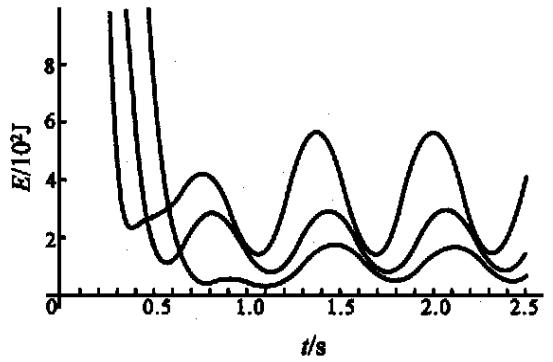


图5

作用, 开始时能量会有一些的衰减, 但系统受到的受迫力又使能量不会衰减为零, 而是在一个恒定的范围内上下波动; 2) 系统受到阻力不同, 即阻尼因数大小不同, 又会使能量的衰减量有所不同, 当阻尼因数较小时, 能量衰减得较小, 当阻尼因数较大时, 能量也衰减得较大; 3) 系统的能量在3种情况下都有一个调整状态。

另外, 我们还计算了当 $\gamma^2 < \omega_0^2$ 时, 阻尼因数 γ 以及系统固有频率 ω_0 不变的情况下, 系统能量在不同受迫力频率 ω 下随时间变化的曲线, 如图6所示。

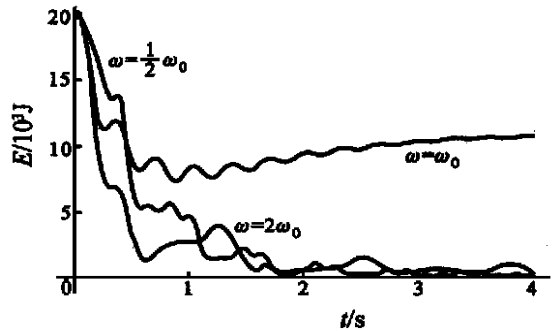


图6

从图中可以看出: 1) 系统由于受到阻力的作用, 能量有一定的衰减, 但由于受迫力的作用不至于使能量衰减为零; 2) 在受迫力频率 ω 跟系统的固有频率 ω_0 相等时, 系统的能量衰减得最小, 而在 ω 大于或小于固有频率 ω_0 时, 能量衰减得较大。

综上, 我们可以得出以下结论: 1) 阻尼因

数较大时, 系统的能量以及振幅衰减得较大; 2) 受迫力的频率大于或小于系统固有频率时, 阻力破坏系统振动同步性的机会增多, 系统的阻尼增大, 振幅和系统的能量减小; 3) 只有当受迫力频率和系统固有频率相等时, 系统所受影响较小, 因此振幅和能量衰减都较小. 如果要求系统的振幅和能量的损失都较小时, 应选择受迫力频率尽可能地与固有频率相同; 4) 当受迫力频率与固有频率不一致时, 应选择受迫力频率小于固有频率, 这样才能保证系统的能量和振幅损失不大.

通过以上的讨论, 我们得到受迫阻尼振动系统许多新的物理特性. 这对于研究实际的受迫阻尼振动系统具有一定的指导意义.

参考文献:

- [1] 赵凯华, 罗蔚茵. 新概念物理教程 力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1995. 271.
- [2] Marcelo Alonso, Edward J Finn. Fundamental University Physics [M]. 2nd Edition. Addison-Wesley Publishing Company Inc, 1980. 354.
- [3] 郑永令, 贾起民. 力学[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1990. 196.

A study on dynamic properties of a forced oscillation system

WANG Yi¹, YANG Yit-ping², ZHAO Jian-sheng²

(1. Department of Astronomy and Applied Physics, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui, 230026, China;

2. Department of Physics, Guangzhou Normal University, Guangzhou, Guangdong, 510405, China)

Abstract: The dynamic properties and the energies of a forced damping oscillation system are studied quantitatively under three different situations. It is meaningful to study the real forced oscillation system by present approach.

Key words: Forced damping oscillation; damped factor; intrinsic angular frequency

(上接 21 页)

参考文献:

[1] 牟绪成, 邓新元, 董文达. 波动与光学 下册[M]. 北京:

清华大学出版社, 1994.

[2] 吴百诗. 大学物理 下册[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1994.

[3] 张立昂. 基础数学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1993.

An analysis of phenomenon of grating diffraction in conditions of the oblique incidence

SU Yafeng, LI Pixuan, XU Zhongfeng, ZHANG Xiaolin

(Science Collage of Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shaanxi, 710049, China)

Abstract: The phenomenon of grating diffraction in special condition is analyzed and studied, and system error which is caused by peculiar oblique incidence, and is not considered in the experiment of using grating to measure wavelength, is also clarified.

Key words: grating; diffraction; oblique incidence